Poglavlje 1

Vektori

Skalarni produkt

Definicija: *Neka su $\vec{a}, \vec{b}$ vektori.* ***Skalarni produkt*** *vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiramo kao:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

pri čemu je $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Ako je $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$, tada definiramo $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
Ako je $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$, onda kažemo da su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ***okomiti*** *ili* ***ortogonalni****.*

Svojstva:

(i) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{|}a|^2 = \geq 0$,

(ii) $\vec{a}^2 = 0 \iff \vec{a} = 0$,

(iii) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,

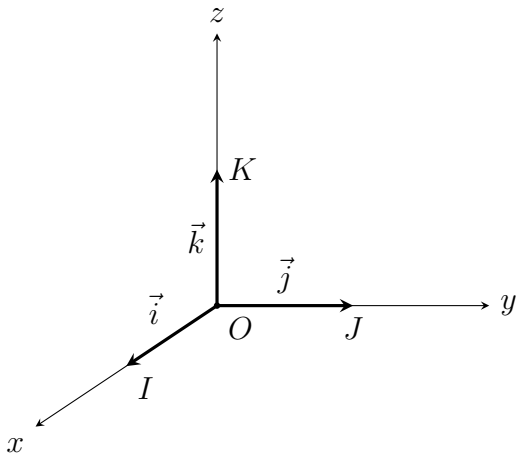
(iv) $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$,

(v) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

(vi) $\vec{a}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ su okomiti $\iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Definicija: *Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ baza vektorskog prostora V^3 takva da su vektori baze jedinični i međusobno okomiti, tj. $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ i $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$, $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$. Takvu bazu nazivamo* ***ortonormiranom bazom*** *(ONB).*

Primjer 1 (Standardna ortonormirana baza za V^3)**:**
Neka je O ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava u prostoru i neka su $I = (1, 0, 0)$, $J = (0, 1, 0)$ i $K = (0, 0, 1)$ točke na koordinatnim osima.
Tada vektori $\{\vec{i} = \overrightarrow{OI}, \vec{j} = \overrightarrow{OJ}, \vec{k} = \overrightarrow{OK}\}$ čine ***standardnu ortonormiranu bazu*** *za prostor V^3.*



Nadalje, radijvektor točke $A = (x, y, z)$ ima koordinate

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z).$$

Zato u zadacima u kojima su nam zadane koordinate točaka u Kartezijevom koordinatnom sustavu te koordinate poistovjećujemo s koordinatama radijvektora točaka.

Zadatak 1.34. Izračunajte $(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k})$ ako je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormirana baza.

Rješenje. Korištenjem svojstva skalarnog produkta redom računamo

$$\begin{aligned}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}) &= 2\vec{i}^2 - 3\vec{i} \cdot \vec{j} - \vec{i} \cdot \vec{k} - 2\vec{j} \cdot \vec{i} + 3\vec{j}^2 \\ &\quad + \vec{j} \cdot \vec{k} + 2\vec{k} \cdot \vec{i} - 3\vec{k} \cdot \vec{j} - \vec{k}^2 = 4.\end{aligned}$$

Napomena. Neka su $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} = (b_1, b_2, b_3)$ vektori u ONB $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Tada je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Zadatak 1.35. Odredite skalarni produkt vektora $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n}$ i $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$ gdje je $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 4$ i $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 60°$.

Rješenje. Redom imamo

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (2\vec{m} - \vec{n}) \cdot (\vec{m} - 2\vec{n}) = 2|\vec{m}|^2 - 4\vec{m} \cdot \vec{n} - \vec{n} \cdot \vec{m} + 2|\vec{n}|^2 \\ &= 2|\vec{m}|^2 - 5\vec{m} \cdot \vec{n} + 2|\vec{n}|^2 = 2|\vec{m}|^2 - 5|\vec{m}||\vec{n}| \cos\angle(\vec{m}, \vec{n}) + 2|\vec{n}|^2 \\ &= 2 \cdot 4 - 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 16 = 20.\end{aligned}$$

Zadatak 1.36. Koliki je modul vektora $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ ako je $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = \sqrt{3}$ i $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = 30°$?

Rješenje. Redom računamo

$$\begin{aligned}|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} &= (\vec{p} - 2\vec{q}) \cdot (\vec{p} - 2\vec{q}) = |\vec{p}|^2 - 4\vec{p} \cdot \vec{q} + 4|\vec{q}|^2 \\ &= 4 - 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot 3 = 4.\end{aligned}$$

Iz gornjeg konačno slijedi da je $|\vec{a}| = 2$.

Zadatak 1.37. Dani su vrhovi $A(-3,-2,0)$, $B(3,-3,1)$, $C(5,0,2)$ i $D(d_1,d_2,d_3)$. Odredite kut među dijagonalama paralelograma.

Rješenje. Odredimo najprije koordinate vrha $D=(d_1,d_2,d_3)$.
Budući da je $ABCD$ paralelogram, vrijedi $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.
Koordinate vektora $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{BC}$ su redom

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=(d_1,d_2,d_3)-(-3,-2,0)=(d_1+3,d_2+2,d_3),$$
$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(5,0,2)-(3,-3,1)=(2,3,1).$$

Dakle, imamo da je

$$(d_1+3,d_2+2,d_3)=(2,3,1)$$

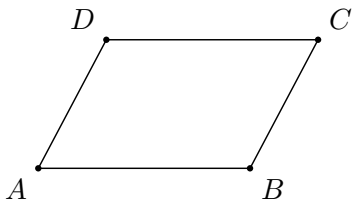
iz čega slijedi da je $D=(d_1,d_2,d_3)=(-1,1,1)$.
Koordinate vektora dijagonala $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$ su

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(5,0,2)-(-3,-2,0)=(8,2,2),$$
$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=(-1,1,1)-(3,-3,1)=(-4,4,0).$$

Konačno iz definicije skalarnog produkta sada možemo izračunati kut između dijagonala. Redom imamo

$$\cos\angle(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD})=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}=\frac{8\cdot(-4)+2\cdot4+2\cdot0}{\sqrt{8^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+4^2+0^2}}=-\frac{1}{2}.$$

Dakle, $\angle(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD})=120^\circ$.



Zadatak 1.39. Dani su vektori $\vec{u}=(6,1,1)$, $\vec{v}=(0,3,-1)$ i $\vec{w}=(-2,3,5)$. Odredite $\lambda\in\mathbb{R}$ tako da vektori $\vec{u}+\lambda\vec{v}$ i $\vec{w}$ budu okomiti.

Rješenje. Vektori $\vec{u}+\lambda\vec{v}$ i $\vec{w}$ su okomiti ako je njihov skalarni produkt jednak 0. Redom imamo

$$(\vec{u}+\lambda\vec{v})\cdot\vec{w}=0,$$
$$(6,1+3\lambda,1-\lambda)\cdot(-2,3,5)=0,$$
$$-12+3+9\lambda+5-5\lambda=0,$$
$$4\lambda=4,$$
$$\lambda=1.$$

Zadatak 1.40. Ako za točke A, B, C i D vrijedi $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2 = \overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2$, dokažite da su tada $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AD}$ ortogonalni za $B \neq C$ i $A \neq B$.

Rješenje. Jednakost iz uvjeta zadatka redom možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{gathered}
\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{BD}^2 = 0, \\
(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD})(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD}) = 0, \\
\overrightarrow{CB}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CB}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD}) = 0, \\
\overrightarrow{CB}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD}) = 0, \\
\overrightarrow{CB}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}) = 0, \\
2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0
\end{gathered}$$

Dakle, mora biti $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ iz čega slijedi da su vektori $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AD}$ ortogonalni.

Zadatak 1.41. U pravokutnom trokutu ABC s pravim kutom u vrhu C, duljine stranica a, b i c odnose se kao $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$. Dokažite da su težišnice t_b i t_c tog trokuta međusobno okomite.

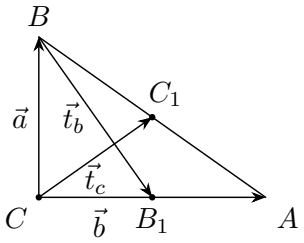
Rješenje. Neka je $\{\vec{a} = \overrightarrow{CB}, \vec{b} = \overrightarrow{CA}\}$ baza. Iz uvjeta zadatka imamo da je $|\vec{b}| = \sqrt{2}|\vec{a}|$ te da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ okomiti, tj. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
Zapišimo vektore težišnica $\vec{t_b}$ i $\vec{t_c}$ pomoću vektora baze:

$$\begin{aligned}
\vec{t_b} &= -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \\
\vec{t_c} &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.
\end{aligned}$$

Da bi dokazali okomitost težišnica t_b i t_c dovoljno je izračunati skalarni produkt vektora težišnica. Redom imamo

$$\begin{aligned}
\vec{t_b} \cdot \vec{t_c} &= \left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \\
&= -\frac{1}{2}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 \\
&= -\frac{1}{2}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}(\sqrt{2}|\vec{a}|)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Dakle, težišnice t_b i t_c su međusobno okomite.



Zadatak 1.42. Koji kut zatvaraju vektori $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$ ako je $\vec{a} + \vec{b} \perp 2\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{a} - 2\vec{b} \perp \vec{a} + 3\vec{b}$?

Rješenje. Označimo s φ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Iz uvjeta okomitosti u zadatku dobivamo sljedeći sustav

$$\begin{cases} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 0, \\ (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b}) = 0. \end{cases}$$

Nakon sređivanja imamo

$$\begin{cases} 2|\vec{a}|^2 + 3|\vec{a}||\vec{b}| \cos\varpi + |\vec{b}|^2 = 0, \\ |\vec{a}|^2 + |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varpi - 6|\vec{b}|^2 = 0. \end{cases}$$

Dijeljenjem svih jednadžbi sustava s $|\vec{a}||\vec{b}|$ i uvođenjem supstitucije $t = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ dobivamo novi sustav s nepoznanicama t i φ

$$\begin{cases} 2t + 3\cos\varphi + \frac{1}{t} = 0, \\ t + \cos\varphi - \frac{6}{t} = 0. \end{cases}$$

Iz posljednje jednadžbe u sustavu imamo da je $\cos\varphi = \frac{6}{t} - t$. Uvrštavanjem natrag u prvu jednadžbu sustava dobivamo sljedeću jednadžbu za t:

$$\begin{aligned} \implies 2t + \frac{18}{t} - 3t + \frac{1}{t} &= 0, \\ -t^2 + 19 &= 0, \\ t = \sqrt{19} > 0 \quad \left(\text{jer je } t = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} > 0 \right). \end{aligned}$$

Uvrštavanjem natrag u izraz za $\cos\varphi$ konačno dobivamo

$$\cos\varphi = \frac{6}{\sqrt{19}} - \sqrt{19} = -\frac{13}{\sqrt{19}} < -1.$$

Kako je $\cos\varphi < -1$ slijedi da ne postoje takvi vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Zadatak 1.43. Dani su vrhovi trokuta $A(1,1,1)$, $B(2,4,3)$ i $C(1,0,4)$. Odredite duljinu visine na stranicu $\overline{AB}$.

Rješenje. Koordinate vektora stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ su redom

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (2,4,3) - (1,1,1) = (1,3,2), \\ \overrightarrow{AC} &= (1,0,4) - (1,1,1) = (0,-1,3). \end{aligned}$$

Vektor visine na stranicu $\overline{AB}$ je

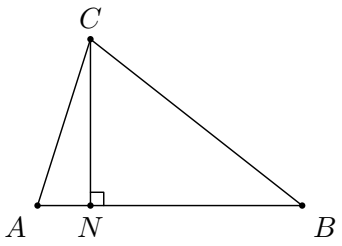
$$\begin{aligned} \vec{v} = \overrightarrow{CN} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{AB} \\ &= (0,1,-3) + \lambda(1,3,2) = (\lambda, 1+3\lambda, -3+2\lambda). \end{aligned}$$

Kako je $\vec{v}$ okomit na vektor $\overrightarrow{AB}$ slijedi

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB} = (\lambda, 1+3\lambda, -3+2\lambda) \cdot (1,3,2) = 14\lambda - 3 = 0$$

iz čega slijedi da je $\lambda = \frac{3}{14}$, tj. $\vec{v} = \left(\frac{3}{14}, \frac{23}{14}, -\frac{18}{7}\right)$.
Duljina visine je

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{3}{14}\right)^2 + \left(\frac{23}{14}\right)^2 + \left(-\frac{18}{7}\right)^2} = \frac{1}{14}\sqrt{1834}.$$

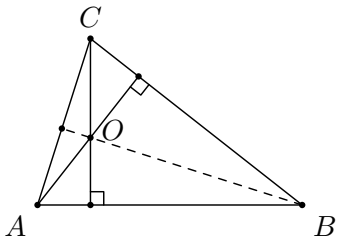


Zadatak 1.45. Dokažite da se visine trokuta sijeku u jednoj točki.

Rješenje. Označimo s O sjecište visina iz vrhova A i C. Ako pokažemo da je $\overrightarrow{OB}$ okomito s $\overrightarrow{AC}$, slijedit će da točka O leži i na visini iz vrha B. Redom računamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC}}_{0} + \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0.\end{aligned}$$

Dakle, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{AC}$ su zaista okomiti.



Zadatak 1.46. Dan je trokut OAB t.d. je $\overrightarrow{OA} = (1,2,1)$ i $\overrightarrow{OB} = (-6,3,-3)$. Odredite duljinu $\overline{OC}$ simetrale kuta AOB.

Rješenje. Vektor simetrale kuta možemo zapisati na sljedeći način

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = (1-7\lambda, 2+\lambda, 1-4\lambda)$$

Iz definicije skalarnog produkta imamo da za kut između vektora vrijedi

$$\cos\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OC}|\,|\overrightarrow{OA}|},$$

$$\cos\angle(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}) = \frac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OC}|\,|\overrightarrow{OB}|}.$$

Kako je OC simetrala kuta, imamo da je $\angle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}) = \angle(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB})$ iz čega slijedi da mora biti

$$\frac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OC}|\,|\overrightarrow{OA}|} = \frac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OC}|\,|\overrightarrow{OB}|},$$

tj. nakon kraćenja obje strane s $|\overrightarrow{OC}|$ imamo da vrijedi

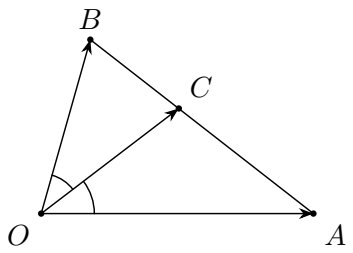
$$\frac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}$$

Uvrštavanjem koordinata svih vektora i sređivanjem izraza dobivamo jednadžbu

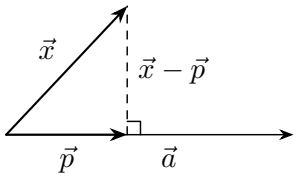
$$\frac{6-9\lambda}{\sqrt{6}} = \frac{57\lambda-3}{\sqrt{54}}.$$

Rješavanje gornje jednadžbe je $\lambda = \frac{1}{4}$, tj. $\overrightarrow{OC} = \left(-\frac{3}{4}, \frac{9}{4}, 0\right)$.
Konačno, tražena duljina simetrale kuta je

$$|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{81}{16}} = \frac{3}{4}\sqrt{10}.$$



Ortogonalna projekcija vektora $\vec{x}$ na vektor $\vec{a}$:
Projekcija je vektor $\vec{p}$ kolinearan s vektorom $\vec{a}$, tj. $\vec{p} = \lambda\vec{a}$ tako da je vektor $(\vec{x}-\vec{p})$ okomit na vektor $\vec{a}$, tj. vrijedi $(\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{a} = 0$.



Iz gornjih uvjeta možemo izvesti formulu za projekciju $\vec{p}$.

$$\begin{aligned}(\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{a} &= 0,\\ (\vec{x}-\lambda\vec{a})\cdot\vec{a} &= 0,\\ \vec{x}\cdot\vec{a} - \lambda|\vec{a}|^2 &= 0,\end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{\vec{x} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2}.$$

Dakle, ortogonalna projekcija vektora $\vec{x}$ na vektor $\vec{a}$ je dana formulom

$$\vec{p} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}.$$

Napomena.

- Duljina vektora $\vec{p}$ ne ovisi o duljini vektora $\vec{a}$. Zato možemo govoriti i o ortogonalnoj projekciji vektora na pravac.
- Produkt $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ nema smisla!

  Ako gledamo $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$, onda je to vektor kolinearan s $\vec{c}$ jer je $\vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$.

  Ako gledamo $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$, onda je to vektor kolinearan s $\vec{a}$.

Zadatak 1.47. Neka je $\vec{a} = (-2, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 5, 0)$ i $\vec{c} = (4, 4, -2)$. Odredite ortogonalnu projekciju vektora $3\vec{a} - 2\vec{b}$ na vektor $\vec{c}$.

Rješenje.

$$\vec{x} = 3\vec{a} - 2\vec{b} = (-6, 3, 3) - (2, 10, 0) = (-8, -7, 3).$$

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \frac{\vec{x} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2}\vec{c} = \frac{-32 - 28 - 6}{16 + 16 + 4}(4, 4, -2) \\ &= -\frac{66}{36}(4, 4, -2) = -\frac{11}{6}(4, 4, -2) = \left(-\frac{22}{3}, -\frac{22}{3}, \frac{11}{3}\right).\end{aligned}$$

Zadatak 1.48. Neka je $\vec{a} = (1, -3, 4)$, $\vec{b} = (3, -4, 2)$ i $\vec{c} = (-1, 1, 4)$. Odredite ortogonalnu projekciju vektora $\vec{b} + \vec{c}$ na vektor $\vec{a}$.

Rješenje. $\vec{b} + \vec{c} = (2, -3, 6)$.

$$\vec{p} = \frac{(\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \frac{2 + 9 + 24}{1 + 9 + 16}(1, -3, 4) = \frac{35}{26}(1, -3, 4).$$

Zadatak 1.49. Dan je trokut ABC i proizvoljan pravac p koji prolazi težištem trokuta. Ako su A', B' i C' ortogonalne projekcije vrhova trokuta na pravac p, dokažite da je $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

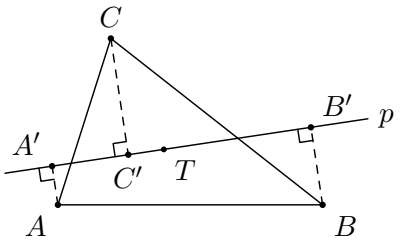
Rješenje. Redom imamo da je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} &= \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TA'} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{TB'} + \overrightarrow{CT} + \overrightarrow{TC'} \\ &= -\underbrace{(\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC})}_{\vec{0}\text{ (Zadatak 1.5)}} + \overrightarrow{TA'} + \overrightarrow{TB'} + \overrightarrow{TC'} \\ &= \overrightarrow{TA'} + \overrightarrow{TB'} + \overrightarrow{TC'}.\end{aligned}$$

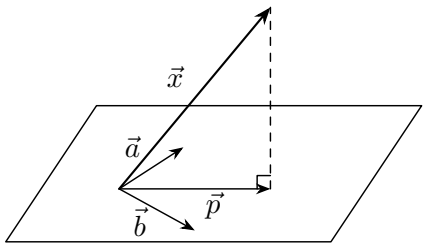
Uočimo da su vektori $\overrightarrow{TA'}, \overrightarrow{TB'}, \overrightarrow{TC'}$ ortogonalne projekcije vektora $\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TC}$ na pravac p. Zato je vektor $\overrightarrow{TA'} + \overrightarrow{TB'} + \overrightarrow{TC'}$ ortogonalna projekcija vektora $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}$ na pravac p.
Međutim, $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$ iz čega slijedi da je onda i ortogonalna projekcija

$$\overrightarrow{TA'} + \overrightarrow{TB'} + \overrightarrow{TC'} = \vec{0}.$$

Dakle, $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ što je i trebalo pokazati.



Ortogonalna projekcija vektora $\vec{x}$ na ravninu određenu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$: Projekcija je vektor $\vec{p}$ koji se nalazi u ravnini određenoj vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ takav da je vektor $\vec{x} - \vec{p}$ okomit na ravninu određenu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



Iako ne postoji lijepa formula za projekciju vektora na ravninu kao u slučaju projekcije vektora na vektor, gornje uvjete možemo zapisati algebarski slično kao u slučaju projekcije vektora na vektor:

- vektor $\vec{p}$ se nalazi u ravninu određenoj s $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako i samo ako je $\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $\vec{x} - \vec{p}$ je okomit ravninu određenu s $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako i samo ako je $\vec{x} - \vec{p} \perp \vec{a}$ i $\vec{x} - \vec{p} \perp \vec{b}$, tj. $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{a} = 0$ i $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{b} = 0$.

Gornji uvjeti daju linearni sustav iz kojeg određujemo skalare α i β te samim time i projekciju $\vec{p}$.
U idućem zadatku ćemo ilustrirati kako određujemo ortogonalnu projekcija na ravninu za zadane vektore $\vec{x}$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Zadatak 1.52. Ravnina je razapeta vektorima $\vec{a} = (1, 2, 1)$ i $\vec{b} = (1, 1, 0)$. Odredite projekciju vektora $\vec{x} = (8, 4, 3)$ na tu ravninu.

Rješenje. Tražimo vektor $\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ takav da je $\vec{x} - \vec{p} \perp \vec{a}$ i $\vec{x} - \vec{p} \perp \vec{b}$.

$$\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha(1, 2, 1) + \beta(1, 1, 0) = (\alpha + \beta, 2\alpha + \beta, \alpha).$$

Iz uvjeta $\vec{x} - \vec{p} \perp \vec{a}$ imamo da je

$$\begin{gathered}(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{a} = 0,\\ (8 - \alpha - \beta, 4 - 2\alpha - \beta, 3 - \alpha) \cdot (1, 2, 1) = 0,\\ 8 - \alpha - \beta + 8 - 4\alpha - 2\beta + 3 - \alpha = 0,\\ -6\alpha - 3\beta = -19.\end{gathered}$$

Iz uvjeta $\vec{x} - \vec{p} \perp \vec{b}$ imamo da je

$$\begin{gathered}(8 - \alpha - \beta, 4 - 2\alpha - \beta, 3 - \alpha) \cdot (1, 1, 0) = 0,\\ 8 - \alpha - \beta + 4 - 2\alpha - \beta = 0,\\ -3\alpha - 2\beta = -12.\end{gathered}$$

Iz gornjih uvjeta imamo linearni sustav za skalare α i β:

$$\begin{cases} -6\alpha - 3\beta = -19, \\ -3\alpha - 2\beta = -12 \end{cases}.$$

Rješenja gornjeg sustava su $\alpha = \frac{2}{3}$ i $\beta = 5$. Dakle,

$$p = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \frac{2}{3}(1, 2, 1) + 5(1, 1, 0) = \left(\frac{17}{3}, \frac{19}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Zadatak 1.53. Dani su vrhovi $A(1, 2, 3)$, $B(3, 2, 1)$ i $C(1, 4, 1)$ trokuta ABC. Pokažite da je taj trokut jednakostraničan tako da pokažete da:

(a) ima sve tri stranice jednake duljine;

(b) ima dvije stranice jednake duljine i kut među njima je mjere 60°;

(c) ima dva kuta mjere 60°.

Rješenje.

(a) Redom računamo

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3, 2, 1) - (1, 2, 3) = (2, 0, -2) \implies |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2},\\ &\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (1, 4, 1) - (1, 2, 3) = (0, 2, -2) \rightsquigarrow |\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{2},\\ &\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (1, 4, 1) - (3, 2, 1) = (-2, 2, 0) \rightsquigarrow |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

(b) Iz dijela (a) znamo da je $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{2}$. Pokažimo još da je kut u vrhu A, tj. kut između vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ mjere 60°:

$$\cos\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|} = \frac{(2, 0, -2) \cdot (0, 2, -2)}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

$$\implies \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60°.$$

(c) Iz dijela (b) znamo da je kut u vrhu A mjere $60°$. Pokažimo još da je kut u vrhu C mjere $60°$:

$$\cos\angle(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{BC}|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \implies \angle(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}) = 60°.$$

Zadatak 1.54. Dan je trokut OAB takav da je $\overrightarrow{OA} = (1,2,1)$ i $\overrightarrow{OB} = (-6,3,-3)$. Odredite duljinu težišnice iz vrha O.

Rješenje. Vektor težišnice $\overrightarrow{OP}$ je radijvektor polovišta dužine $\overline{AB}$. Zato je

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\big((1,2,1)+(-6,3,-3)\big) = \frac{1}{2}(-5,5,-2).$$

Konačno, duljina tražene težišnice je

$$|\overrightarrow{OP}| = \frac{1}{2}\sqrt{25+25+4} = \frac{1}{2}\sqrt{54} = \frac{3}{2}\sqrt{6}.$$

